Из сказанного ясно, что вероятностное решение некоторых краевых задач можно связать с цепью Маркова, которую мы будем называть «блужданием по сферам» (иначе ее называют также «сферическим процессом»). Впервые такой процесс ввел, по-видимому, Дж. Браун для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. В статье (Мюллер, 1956) подробно исследуются свойства процесса «блуждания по сферам» на основе некоторых свойств винеровского процесса.

На первый взгляд кажется, что вероятностное решение краевых задач для уравнения $\Delta u - cu = -g$ нельзя построить, пользуясь только «блужданием по сферам», так как выражение (1.19) зависит от поведения винеровской траектории внутри сфер. Однако это все-таки оказалось возможным благодаря использованию «частичного осреднения» (Елепов, Михайлов, 1969; Кронберг, 1976) и специальных интегральных уравнений второго рода (Елепов, Михайлов, 1973). Поэтому в данной главе рассматривается непосредственно процесс «блуждания по сферам», который значительно проще винеровского.

§ 2.2. Определение и простейшие свойства «блуждания по сферам»

Введем следующие обозначения:

D' — замыкание области D;

$d(P)$ — расстояние от точки P до границы $\Gamma(D)$ области D;

$\Gamma_\varepsilon - \varepsilon$ — окрестность границы Γ; $\Gamma_\varepsilon = \{P \in D';\ d(P) < \varepsilon\}$;

$S(P) = \{Q \in D' : |Q - P| = d(P)\}$ — максимальная из сфер с центром в точке P, целиком лежащих в D'.

В процессе «блуждания по сферам» очередная точка P_{k+1} выбирается равномерно по поверхности сферы $S(P_k)$; процесс обрывается, если точка попадает в Γ_ε.

Обозначим через $s(P, \varepsilon)$ — поверхность той части сферы $S(P)$, которая принадлежит множеству Γ_ε. Проведем сферу S_ε радиуса ε с центром в точке Q касания границы Γ сферой $S(P)$ (рис. 1). Тогда площадь части сферы $S(P)$, целиком лежащей внутри S_ε, равна $\pi\varepsilon^2$. Отсюда получаем следующую оценку снизу для вероятности попадания очередной точки в Γ_ε:

$$\frac{S(P, \varepsilon)}{4\pi d^2(P)} \geqslant \frac{\pi\varepsilon^2}{4\pi d^2(P)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon^2}{4d^2_{\max}} = \nu(\varepsilon), \qquad (2.1)$$

где $d_{\max}$ — точная верхняя граница радиусов сфер, целиком лежащих в D.

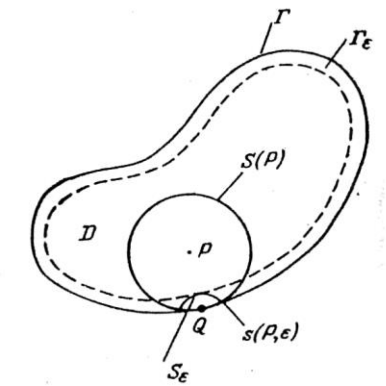

Рис. 1. Иллюстрация основных геометрических понятий, связанных с «блужданием по сферам».

Дадим теперь точное определение процесса «блуждания по сферам». Зададим цепь Маркова $\{P_n\}$ следующими характеристиками: $r_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - P_0)$ — плотность начального распределения (т. е. цепь «выходит» из точки P_0); $r(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') = \delta\mathbf{r}(\mathbf{r}')$ — плотность перехода из $\mathbf{r}$ в $\mathbf{r}'$, представляющая собой обобщенную трехмерную плотность равномерного распределения вероятностей на сфере $S(\mathbf{r})$; $p(\mathbf{r})$ — вероятность обрыва цепи, определяемая выражением:

$$p(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon, \\ 1, & \mathbf{r} \in \Gamma_\varepsilon. \end{cases}$$

Как уже было указано, эта цепь называется «блужданием по сферам». Ее можно, очевидно, записать следующим образом: $P_n = P_{n-1} + \omega_n d(P_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, где ω_n — последовательность независимых изотропных векторов единичной длины. Нетрудно заметить, что вероятность $p_1(\mathbf{r})$ обрыва цепи после очередного перехода равна вероятности непосредственного попадания из точки $\mathbf{r}$ в Γ_ε и удовлетворяет неравенству $p_1(\mathbf{r}) \geqslant \nu(\varepsilon)$. Отсюда находим, что среднее число переходов $q(P_0, \varepsilon)$, определяющее среднее время расчетов на ЭВМ, не превосходит $\nu^{-1}(\varepsilon)$.

В работе (Мюллер, 1956) показано, что траектория «блуждания по сферам» с вероятностью 1 сходится к границе области. Следовательно, для получения более точной оценки $q(P_0, \varepsilon)$ можно использовать оценки плотности $f(\mathbf{r})$ распределения среднего числа центров сфер $S(P_k)$ вблизи границы. Обозначим через x расстояние до границы. Соображения подобия показывают, что плотность $f(x)$ распределения среднего числа центров сфер по x с точностью до постоянного множителя должна быть близкой к x^{-1}. Отсюда вытекает соотношение

$q(P_0, \varepsilon) \leqslant c|\ln \varepsilon|$, которому в следующем параграфе мы придадим более точный смысл на основе теории восстановления, изучающей свойства последовательностей сумм независимых случайных величин.

§ 2.3. Среднее число шагов «блуждания по сферам» до попадания в ε-окрестность плоскости

1. Пусть D — полупространство, ограниченное плоскостью Г. Обозначим $d_n = d(P_n)$, где $\{P_n\}$ — цепь «блуждания по сферам», начинающаяся в точке $P = P_0$. Величину $\ln d_n$ можно представить следующим образом:

$$\ln d_n = \ln\left(d_0 \prod_{h=1}^{n} \frac{d_k}{d_{k-1}}\right) = \ln d_0 + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{d_k}{d_{k-1}}\right). \tag{2.2}$$

Для плоской границы величины $\ln (d_k/d_{k-1})$, очевидно, независимы и одинаково распределены; например, в трехмерном случае

$$d_k = d_{k-1} \cdot 2\alpha_k, \tag{2.3}$$

где α_k — независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале (0,1). Формула (2.3) следует из того, что проекция конечной точки изотропного единичного вектора на фиксированную ось в трехмерном случае распределена равномерно в соответствующем интервале (см., например, Феллер, 1967, с. 48).

Требуемые нам результаты теории восстановления (см., например, Кокс, Смит, 1967) содержатся в следующих утверждениях.

Л е м м а 1. *Пусть $\{\eta_k\}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием $\mu < 0$, и*

$$N_y = \min\left\{n : \sum_{k=1}^{n} \eta_k < y\right\}, \quad y < 0.$$

Тогда справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$MN_y = \frac{y}{\mu} + o(|y|) \quad \text{при} \to -\infty. \tag{2.4}$$

Обозначим через $H(y)$ среднее число значений n, для которых выполняется неравенство $\sum_{k=1}^{n} \eta_k > y$. Принято называть $H(y)$ функцией восстановления.

Л е м м а 2. *Пусть $\eta_k \leqslant a < +\infty$, $\mu = M\eta_k < 0$ и $M \exp(-c\eta_k) < +\infty$ для некоторого $c > 0$. Тогда при $y < 0$ производная $H(y)$ существует и $\lim_{y \to -\infty} H'(y) = |\mu|^{-1}$.*

Заметим, что функцию $H'(y)$ обычно называют плотностью восстановления.

2. Далее определяются математические ожидания случайных величин $\eta_k^{(m)} = \ln(d_{k+1}/d_k)$ для различного числа измерений m и их асимптотика при $m \to \infty$. Будет проверено также выполнение условий леммы 2 для величин $\eta_k^{(m)}$.

Л е м м а 3. (Мюллер, 1956). *Пусть D — m-мерное полупространство, ограниченное $(m-1)$-мерной гиперплоскостью. Тогда*

$$M\left(\eta_k^{(m)}\right) = M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k}\middle| m\right) = \ln 2 + \psi\left(\frac{m-1}{2}\right) - \\ - \psi(m-1) < 0, \tag{2.5}$$

где $\psi(z) = \dfrac{d \ln \Gamma(z)}{dz}$, $z > 0$; $\Gamma(z)$ — *гамма-функция. В частности,*

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k}\middle| m = 2\right) = -\ln 2, \quad M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k}\middle| m = 3\right) = \\ = \ln 2 - 1,$$

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k}\middle| \begin{matrix} m \text{ — нечетн.} \\ m \geqslant 3 \end{matrix}\right) = \ln 2 - \sum_{j=\frac{m-1}{2}}^{m-2} \frac{1}{j}, \tag{2.6}$$

$$M\left(\ln \frac{d_{k+1}}{d_k}\middle| \begin{matrix} m \text{ — нечетн.} \\ m \geqslant 4 \end{matrix}\right) = -\ln 2 + \sum_{j=\frac{m}{2}}^{m-2} \frac{1}{j}.$$